ÜBERSICHT

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen

1. Rein quadr. Gleichung
2. Quadr. Ergänzung / Ausklammern
3. Lösen mithilfe der pq-Formel
4. Zeichnerisches Lösen 1
5. Zeichnerisches Lösen 2
6. Anzahl der Lösungen
7. Lösen mit dem Satz von Vieta

quadratische Ergänzung

$$\left[x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

pq-Lösungsformel:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Gleichung:
$x^2 + px + q = 0$

$x^2 = 25$

Beachte:

$(+5)^2 = 25$ und

$(-5)^2 = 25$

$L = \{+5; -5\}$

Rein quadratische Gleichung 1

Eine Gleichung der Form $a \cdot x^2 = d$ ist eine **rein quadratische Gleichung**, weil bei ihr x^2, aber keine Variable mit x-Faktor vorkommt.

Rezept zum Lösen

- Forme die Gleichung so um, dass x^2 auf einer Seite alleine steht. Die Gleichung hat dann die Form $x^2 = e$.
- Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel.
- Schreibe die Lösungsmenge auf.

Beachte dabei:

$x^2 = e$ hat		FALLS		
	keine Lösung		**$e < 0$ ist**	**$L = \{\ \}$**
	eine Lösung		**$e = 0$ ist**	**$L = \{ 0 \}$**
	zwei Lösung		**$e > 0$ ist**	**$L = \{\sqrt{e}; -\sqrt{e}\}$**

Beispiel

$$
\begin{array}{lll}
9x^2 - 125 & = 4x^2 & | +125 \\
9x^2 & = 4x^2 + 125 & | -4x^2 \\
5x^2 & = 125 & | :5 \\
x^2 & = 25 & | \sqrt{\ } \rightsquigarrow L = \{+5; -5\}
\end{array}
$$

Beachte:
$(+5)^2 = 25$ und
$(-5)^2 = 25$

Quadratische Gleichungen

Bei **allgemein quadratischen Gleichungen** kommt auch x vor.

Rezept zum Lösen

- Forme die Gleichung so um, dass sie die Form $(x+d)^2 = e$ hat.
- Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel.
- Löse nach x auf.

Beachte dabei:
es kann 0 oder 1 oder 2 Lösungen geben.

Ausklammern

Gleichungen der Form $x^2 + ax = 0$ können schneller durch Ausklammern gelöst werden $\rightarrow x^2 + ax = x \cdot (x + a) = 0$
Ein Produkt wird 0, sobald mindestens ein Faktor 0 ist, z.B. $4 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 19 = 0$
also sind die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -a$

Beispiele

quadratische Ergänzung

$2x^2 - 14x$	$= -20$	$\mid :2$
$x^2 - 7x$	$= -10$	
$x^2 - 7x + \boxed{3{,}5^2}$	$= -10 + \boxed{3{,}5^2}$	$\mid +3{,}5^2$
$(x - 3{,}5)^2$	$= 2{,}25$	$\mid \sqrt{\ }$
$x - 3{,}5$	$= \pm 1{,}5$	$\mid +3{,}5$
L	$= \{2; 5\}$	

$b^2 = (-7:2)^2 = (-3{,}5)^2 = +3{,}5^2$

Ausklammern

$0 = 2x^2 - 3x$

Faktor x ausklammern

$0 = x \cdot (2x - 3)$

$x_1 = 0$ oder $2x-3 = 0$

$x_2 = 1{,}5$

Rezept zum Lösen

- Forme die Gleichung so um, dass sie die Form $x^2+px+q = 0$ hat.
- Schreibe die Werte für p und q heraus und setze sie in die pq-Formel ein.
- Berechne die 2 Lösungen. Es kann auch 1 oder keine Lösung geben.

Formel

Gleichung:
$x^2 + px + q = 0$

pq-Lösungsformel:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiele

1

$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow p = 6$ und $q = 8$

$$x_1 = -\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8} = -3 + \sqrt{1} = -2$$

$$x_2 = -\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8} = -3 - \sqrt{1} = -4$$

2

$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow p = 2$ und $q = -15$

$$x_1 = -\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)} = -1 + \sqrt{1+15} = 3$$

$$x_2 = -\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)} = -1 - \sqrt{1+15} = -5$$

Herleitung

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\left[x^2 + px + \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2}\right] + q = \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

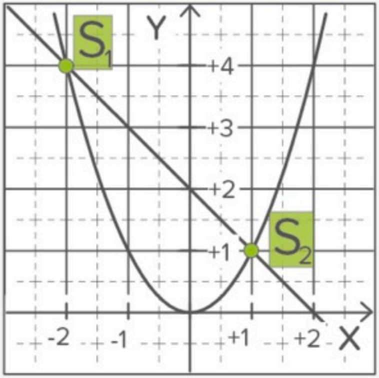
quadratische Ergänzung

$$\left[x + \left(\frac{p}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left[x + \left(\frac{p}{2}\right)\right] = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Löse die quadratische Gleichung $\mathbf{x^2 + x = 2}$ zeichnerisch nach dem **Parabel-Geraden Verfahren**.

Parabel-Geraden-Verfahren



$S_1(\boxed{-2} / 4)$ und $S_2(\boxed{1} / 1)$

x-Werte

$L = \{-2;1\}$

Rezept zum Verfahren

Forme die Gleichung so um, dass x^2 auf einer Seite alleine steht.

$x^2 = -x + 2$

Parabel = Gerade

Schnittpunkte erfüllen beide Seiten

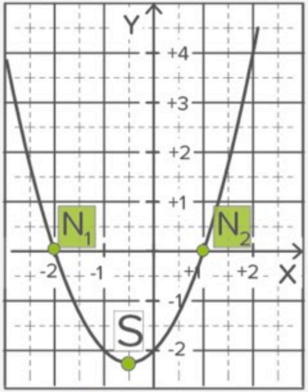
Zeichne die Normalparabel (linke Seite) und die Gerade (rechte Seite).

Die Schnittpunkte (x-Koordinaten) sind die Lösungen der quadratischen Gleichung.

Zeichnerisches Lösen 2

Löse die quadratische Gleichung $\mathbf{x^2 + x = 2}$ zeichnerisch nach dem **Nullstellen Verfahren**.

Nullstellen-Verfahren



$N_1(\boxed{-2} / 0)$ und $N_2(\boxed{1} / 0)$

x-Werte

L= {-2;1}

Rezept zum Verfahren

- Forme die Gleichung so um, dass auf einer Seite 0 alleine steht.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Parabel = y = 0

Nullstelle der Parabel

- Berechne die Scheitelpunktsform der Parabel und zeichne die Normalparabel.

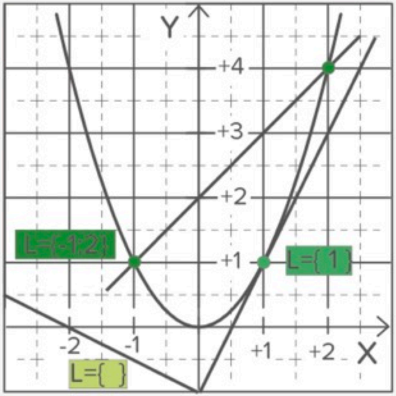
$$(x^2 + x + 0{,}5^2) - 2 - 0{,}25 = 0$$
$$(x + 0{,}5)^2 - 2{,}25 = 0$$
$$S\,(-0{,}5/-2{,}25)$$

- Die x-Werte der Nullstellen liefern die Lösungen der quadratischen Gleichung.

6 Anzahl der Lösungen

Mithilfe der zeichnerischen Lösungsverfahren kann man erkennen, dass es bei quadratischen Gleichungen **keine, eine oder zwei Lösungen** geben kann.

Parabel-Geraden-Verfahren

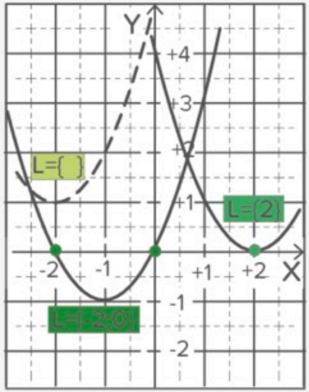


$x^2 = -0{,}5x - 1$ → keine Lösung

$x^2 = 2x - 1$ → eine Lösung

$x^2 = x + 2$ → zwei Lösungen

Nullstellen-Verfahren



$(x+2)^2 + 1 = 0$ → keine Lösung

$(x-2)^2 = 0$ → eine Lösung

$(x+1)^2 - 1 = 0$ → zwei Lösungen

Lösen mit dem Satz von Vieta

Eine quadratische Gleichung mit **ganzzahligen** Lösungen kann auch mithilfe des **Satzes von Vieta** gelöst werden.

Rezept zum Lösen

- Forme die Gleichung $x^2+px+q = 0$ so um, dass sie die Form $(x+a)\cdot(x+b) = 0$ hat.
- Dabei gilt: $q = a\cdot b$ und $p = a + b$
- Schreibe die Lösungen auf:
  → L = {-a; -b}

Infos

Der Franzose François Viète (1540-1603) war ein bedeutender Mathematiker und Astronom. Er wird oft auch als „Vater der Algebra“ bezeichnet.

Beispiele

1

$x^2 - 11x + 10 = 0$ ↝ $(x-1)\cdot(x-10) = 0$

p = -11 / q = +10 **L={+1; +10}**

$10 = (+2)\cdot(+5)$ $(+2) + (5) = 7$

$10 = (-2)\cdot(-5)$ $(-2) + (-5) = -7$

$10 = (+1)\cdot(+10)$ $(+1) + (+10) = 11$

$10 = (-1)\cdot(-10)$ ↝ $(-1) + (-10) = -11$

2

$x^2 + 5x - 6 = 0$ ↝ $(x+6)\cdot(x-1) = 0$

p = 5 / q = -6 **L={-6; +1}**

$-6 = (+3)\cdot(-2)$ $(+3) + (-2) = 1$

$-6 = (-3)\cdot(+2)$ $(-3) + (+2) = -1$

$-6 = (+6)\cdot(-1)$ $(+6) + (-1) = 5$

$-6 = (-6)\cdot(+1)$ ↝ $(-6) + (+1) = -5$