ÜBERSICHT

1 Sinus, Kosinus und Tangens — 2 Dreiecksberechnungen 1

3 Dreiecksberechnungen 2 — 4 Besondere Sinus Werte

5 Der Kosinussatz — 6 Der Sinussatz

Trigonometrie

Kosinussatz

$a^2 =$
$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 =$
$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 =$
$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$\sin 40° = \cos 50°$
$\sin \alpha = \cos (90°-\alpha)$

Sinussatz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

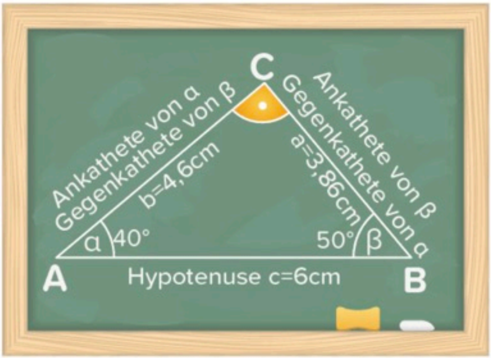
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Sinus, Kosinus und Tangens

Rechtwinklige Dreiecke mit gleich großen spitzen Winkeln sind ähnlich zueinander. Die entsprechenden Seitenverhältnisse sind daher immer gleich. Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens ordnen jedem spitzen Winkel ein entsprechendes Seitenverhältnis zu.

$$\textbf{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \textbf{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \textbf{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\sin 40° = \frac{a}{c} = \frac{3{,}86}{6} \approx 0{,}64 \qquad \cos 40° = \frac{b}{c} = \frac{4{,}6}{6} \approx 0{,}77 \qquad \tan 40° = \frac{a}{b} = \frac{3{,}86}{4{,}6} \approx 0{,}84$$



Mithilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich im **recht-winkligen Dreieck** fehlende Größen berechnen.

1 Seite & 1 Winkel

Bekannt sind
b = 4,6cm und α = 40°

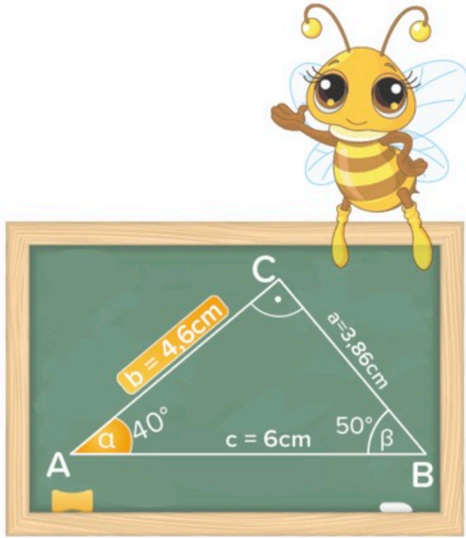
β: $\alpha+\beta+90° = 180° \rightarrow$ **β = 50°**

c:
$$\cos 40° = \frac{b}{c} = \frac{4{,}6}{c} \quad | \cdot c$$
$$c \cdot \cos 40° = 4{,}6 \quad | : \cos 40°$$
$$c = \mathbf{6cm}$$

a (Tangens):
$$\tan 40° = \frac{a}{b} = \frac{a}{4{,}6} \quad | \cdot 4{,}6$$
$$4{,}6 \cdot \tan 40° = a \rightarrow \mathbf{a \approx 3{,}9cm}$$

oder Satz des Pythagoras

a (Pythagoras):
$$a^2 + 4{,}6^2 = 6^2 \quad | - 4{,}6^2$$
$$a^2 = 14{,}84$$
$$a = \sqrt{14{,}84} \approx \mathbf{3{,}9cm}$$



Trigonometrie

Mithilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich im **rechtwinkligen Dreieck** fehlende Größen berechnen.

2 Seiten

Bekannt sind
b = 4,6cm und c = 6cm

α

$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{4{,}6}{6} = \frac{23}{30}$

$\rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{23}{30}\right)} \approx 40°$

β

$\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 50°}$

a — Tangens

$\tan 40° = \frac{a}{b} = \frac{a}{4{,}6} \quad | \cdot 4{,}6$

$4{,}6 \cdot \tan 40° = a \rightarrow \boldsymbol{a \approx 3{,}9\text{cm}}$

oder Satz des Pythagoras

a — Pythagoras

$a^2 + 4{,}6^2 = 6^2 \quad | - 4{,}6^2$

$a^2 = 14{,}84$

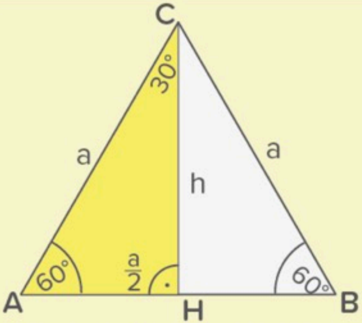
$a = \sqrt{14{,}84} \approx \boldsymbol{3{,}9\text{cm}}$

Trigonometrie

4 Besondere Sinus-Werte

Mithilfe eines gleichseitigen Dreiecks und der Diagonalen im Quadrat lassen sich besondere Sinus- und Kosinus-Werte berechnen.

sin 30° → $\frac{1}{2}$ ← cos 60°



Dreieck ABC ist gleichseitig
Dreieck AHC ist rechtwinklig

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} : \frac{a}{1} = \frac{a \cdot 1}{2 \cdot a} = \frac{1}{2}$$

sin 45° → $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ ← cos 45°

Dreieck ABD ist rechtwinklig

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der Kosinussatz

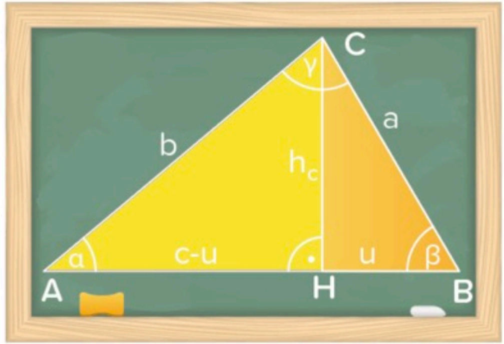
Mithilfe des Kosinussatzes können in einem Dreieck die restlichen Seiten und Winkel berechnet werden, wenn man 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, bzw. 3 Seiten kennt.

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$



Beweis

$\cos\beta = \frac{u}{a} \rightsquigarrow u = a\cdot\cos\beta$ $\quad \sin\beta = \frac{h_c}{a} \rightsquigarrow h_c = a\cdot\sin\beta$ $\quad \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

Satz des Pythagoras für Dreieck AHC

$$\begin{aligned} b^2 &= (c-u)^2 + h_c^2 = c^2 - 2cu + u^2 + h_c^2 = c^2 - 2ca\cdot\cos\beta + u^2 + h_c^2 \\ &= c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cos^2\beta + h_c^2 \quad = c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta \\ &= c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cdot(\cos^2\beta + \sin^2\beta) \quad = c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cdot 1 \end{aligned}$$

Der Sinussatz

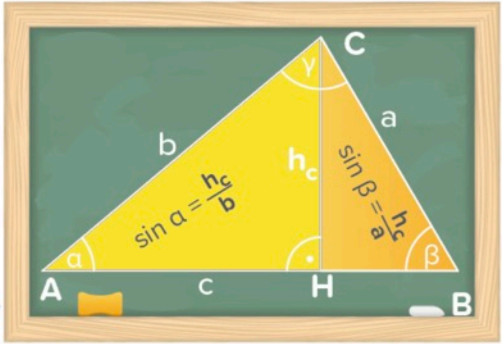
Mithilfe des Sinussatzes können in einem Dreieck die restlichen Seiten und Winkel berechnet werden, wenn man 2 Winkel und eine Seite, bzw. 2 Seiten und den Gegenwinkel der längeren Seite kennt.

Sinussatz

$$\frac{\text{Seite 1}}{\text{Seite 2}} = \frac{\sin(\text{Gegenwinkel1})}{\sin(\text{Gegenwinkel2})}$$

Beweis

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h_c}{b} : \frac{h_c}{a} = \frac{h_c \cdot a}{b \cdot h_c} = \frac{a}{b}$$



Beispiel

$\alpha = 40°;\ \gamma = 80{,}4°$ und $c = 7\,\text{cm}$ ⤳ $\beta = 180° - 40° - 80{,}4° = 59{,}6°$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ ⤳ $\frac{a}{7} = \frac{\sin 40°}{\sin 80{,}4°}\ \Big|\cdot 7$ ⤳ $a = 7\cdot(\sin 40°) : (\sin 80{,}4°) \approx 4{,}6\,\text{cm}$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ ⤳ $\frac{\beta}{7} = \frac{\sin 59{,}6°}{\sin 80{,}4°}\ \Big|\cdot 7$ ⤳ $b = 7\cdot(\sin 59{,}6°) : (\sin 80{,}4°) \approx 6{,}1\,\text{cm}$