

1 Die Variable  $x$  in Gleichungen

2 Äquivalenzumformungen

3 Anzahl der Lösungen

4 Bruchterme und

Bruchgleichungen

5 Zahlenrätsel aufstellen und lösen

### Beachte

Eine Gleichung ist wie eine Waage im Gleichgewicht, wobei das Gewicht eines Gegenstandes unbekannt ist.



$$\begin{array}{l} x + 1 \\ x \end{array} = \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}$$

# Die Variable x in Gleichungen

Die Variable x kann nicht nur wie bei Termen ein Platzhalter für eine beliebige Zahl sein, sondern auch eine **bestimmte, unbekannte Zahl**. Mithilfe einer Gleichung kann die gesuchte Zahl berechnet werden.

## Beachte

Eine Gleichung ist wie eine Waage im **Gleichgewicht**, wobei das Gewicht eines Gegenstandes unbekannt ist.



$$\begin{array}{r} \boxed{x} + 1 \\ \boxed{x} \end{array} = \begin{array}{r} 3 \\ 2 \end{array}$$

## Beispiele für Lösungen

Eine Zahl, die x in der Ausgangsgleichung ersetzt und eine **wahre Aussage** liefert, ist eine Lösung der Gleichung.

$$x + 11 = 10 + 5$$

$$\boxed{4} + 11 = 10 + 5 \quad \checkmark$$

Lösung  $x = 4$

$$5 \cdot x = 31 + 4$$

$$5 \cdot \boxed{7} = 31 + 4 \quad \checkmark$$

Lösung  $x = 7$

$$x^2 = 36$$

$$\boxed{6}^2 = 36 \quad \checkmark$$

$$\text{oder } \boxed{-6}^2 = 36 \quad \checkmark$$

$L = \{+6; -6\}$



# 2 Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung ist wie eine Waage. Damit das Gleichgewicht bleibt, muss man immer auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche machen.

## Rezept zum Lösen



Entferne 1kg auf jeder Schale.



Entferne 1Kiste auf jeder Schale.



Wenn 2 Kisten 4kg wiegen, dann wiegt 1 Kiste 2kg.

Forme die Gleichung durch Addieren oder Subtrahieren so um, sodass  $x$  auf einer Seite alleine steht und auf der anderen Seite eine Zahl.

$$5 + x = 3x + 1 \quad | -1$$

$$4 + x = 3x \quad | -x$$

Dividiere beide Seiten durch den Faktor, der vor  $x$  steht. Setze für die Probe den Wert für  $x$  in die Ausgangsgleichung ein.

$$4 = 2x \quad | :2$$

$$2 = x$$

$$5 + 2 = 3 \cdot 2 + 1 \quad \checkmark$$

Probe

Eine Gleichung hat in der Regel **genau 1 Lösung**. Es gibt aber auch Gleichungen mit **2 Lösungen** oder mit **keiner** oder mit **unendlich vielen Lösungen**.

## genau 1 Lösung

$$\begin{aligned}4 &= 5x - 1 \\5 &= 5x \\x &= 1 \\L &= \{1\}\end{aligned}$$

## genau 2 Lösungen

$$\begin{aligned}2x^2 &= 3(x^2 - 3) \\2x^2 &= 3x^2 - 9 \\0 &= x^2 - 9 \\x^2 &= 9 \\L &= \{+3; -3\}\end{aligned}$$

## unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned}3(3 - x) &= 10 - 3x - 1 \\9 - 3x &= 9 - 3x \\9 &= 9 \\&\text{allgemein gültig} \\L &= \mathbb{Q}\end{aligned}$$

## keine Lösung

$$\begin{aligned}-2x - 3x + 2 &= 5x - 10x - 1 \\-5x + 2 &= -5x - 1 \\2 &= -1 \quad \text{⚡} \\&\text{keine wahre Aussage} \\L &= \{ \}\end{aligned}$$



# 4 Bruchterme und Bruchgleichungen

Steht bei einem Bruch im Nenner eine Variable, dann spricht man von einem **Bruchterm**. Diese können wie normale Brüche *erweitert und gekürzt*, bzw. *addiert und subtrahiert* werden. Es dürfen nur solche Zahlen eingesetzt werden, für die der **Nenner nicht 0** wird. Gleichungen mit Bruchtermen nennt man **Bruchgleichungen**.

## Bruchterme

### erweitern und kürzen

Multipliziere/dividiere den **Zähler** und den **Nenner** des Bruches mit der gleichen Zahl oder Variablen.

$$\begin{array}{l} x \neq -2 \\ \frac{5}{x+2} \stackrel{\cdot 4}{=} \frac{5 \cdot 4}{(x+2) \cdot 4} = \frac{20}{4x+8} \end{array} \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \frac{6}{8x} \stackrel{\div 2}{=} \frac{3}{4x} \end{array}$$

### addieren und subtrahieren

Erweitere beide Brüche, sodass sie den **gleichen Nenner** haben.

$$\begin{array}{l} x \neq 1 \\ \frac{7}{2} + \frac{3}{x-1} = \frac{7 \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-1)} + \frac{3 \cdot 2}{(x-1) \cdot 2} = \\ \frac{7x-7}{2x-2} + \frac{6}{2x-2} = \frac{7x-7+6}{2x-2} = \frac{7x-1}{2x-2} \end{array}$$

## Bruchgleichungen

Multipliziere beide Seiten der Gleichung so mit einem geeigneten Term, dass keine Variable mehr im Nenner steht.

$$x \neq -2 \quad \frac{2}{x+2} = 4 \quad | \cdot (x+2)$$

$$\frac{2 \cdot (x+2)}{x+2} = 4 \cdot (x+2)$$

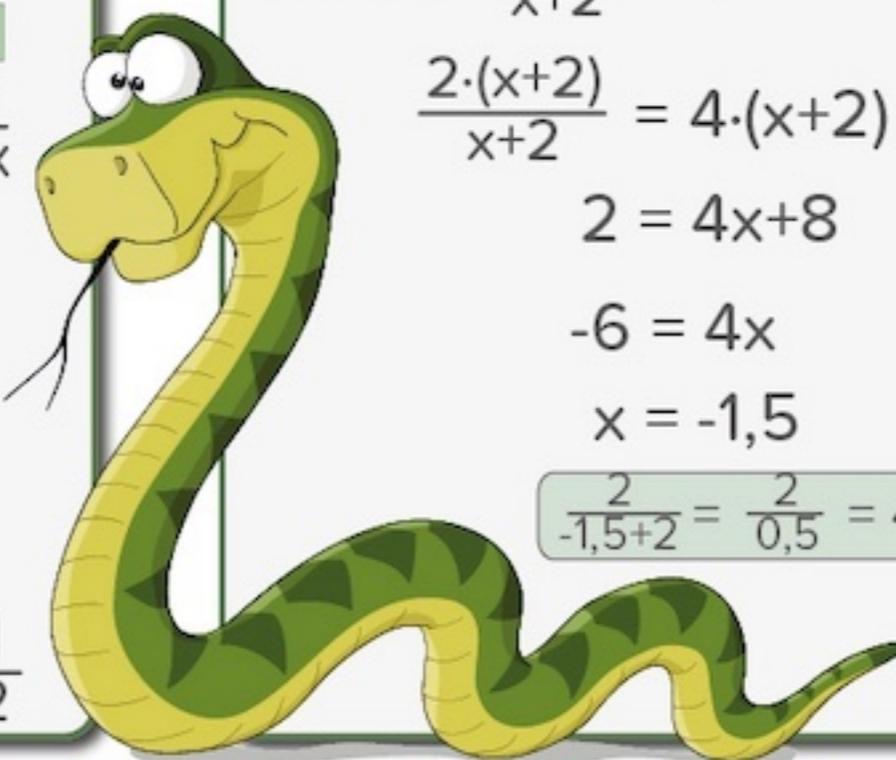
$$2 = 4x + 8 \quad | -8$$

$$-6 = 4x \quad | :4$$

$$x = -1,5$$

$$\frac{2}{-1,5+2} = \frac{2}{0,5} = 4 \checkmark$$

Probe



# Zahlenrätsel aufstellen und lösen

Bei einem Zahlenrätsel ist eine Zahl gesucht, die man mithilfe eines Steckbriefes herausfinden soll. Stelle dazu eine Gleichung mit  $x$  auf, wobei die Variable  $x$  ein Platzhalter für die gesuchte Zahl ist. Übersetze zur Herstellung der Gleichung den Steckbrieftext in Terme. Achte dabei besonders auf Signalwörter.

Subtrahiert man vom  
Dreifachen einer Zahl  
14,  
so erhält man 52.

Gleichung:

$$3 \cdot x - 14 = 52$$

Lösung:

Die gesuchte Zahl ist  
**22.**



Das Doppelte der  
gesuchten Zahl ist um  
3 kleiner als das Drei-  
fache der um 1 kleine-  
ren Zahl.

Gleichung:

$$2 \cdot x + 3 = 3 \cdot (x - 1)$$

Lösung:

Die gesuchte Zahl ist  
**6.**