ÜBERSICHT

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

1. Die Normalparabel $y = x^2$
2. Verschobene Parabeln
3. Normalform $\longleftrightarrow$ Scheitelpunktsform
4. Punktberechnungen
5. Parabeln der Form $y = ax^2$
6. Parabeln der Form $y = a\cdot(x+d)^2+e$
7. Probleme lösen mit Parabeln

allgemeine
Scheitelpunktsform:

$$f(x) = a\cdot(x+d)^2 + e$$

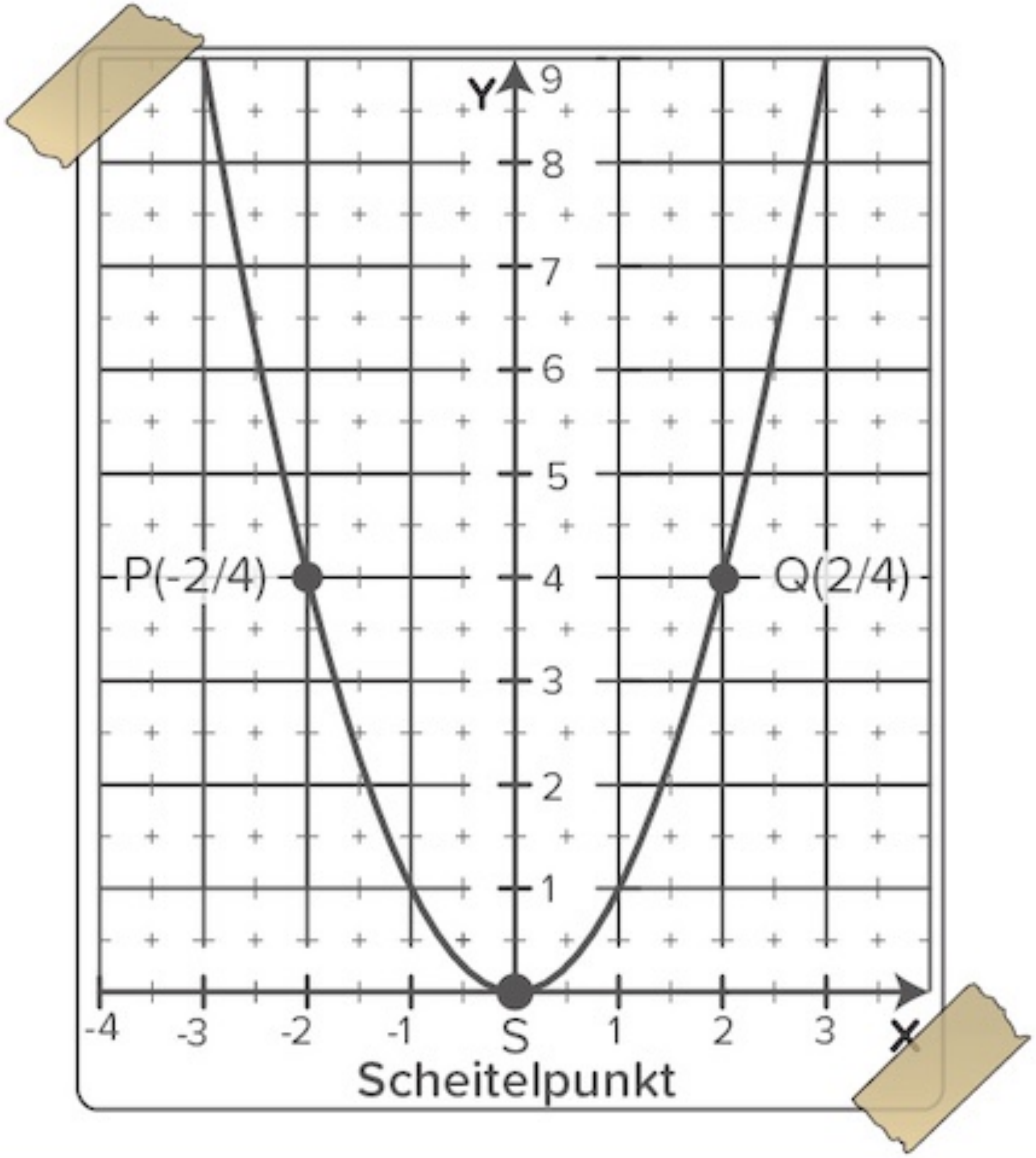
Streckungs-
Stauchungsfaktor

Verschiebung in
y-Richtung

entgegengesetzte
Verschiebung
in **x-Richtung**

Die Normalparabel $y = x^2$

Die Funktionsgleichung $f(x) = y = x^2$ ist eine **quadratische Funktion**. Das Bild dieser Funktion ist eine **Normalparabel**.

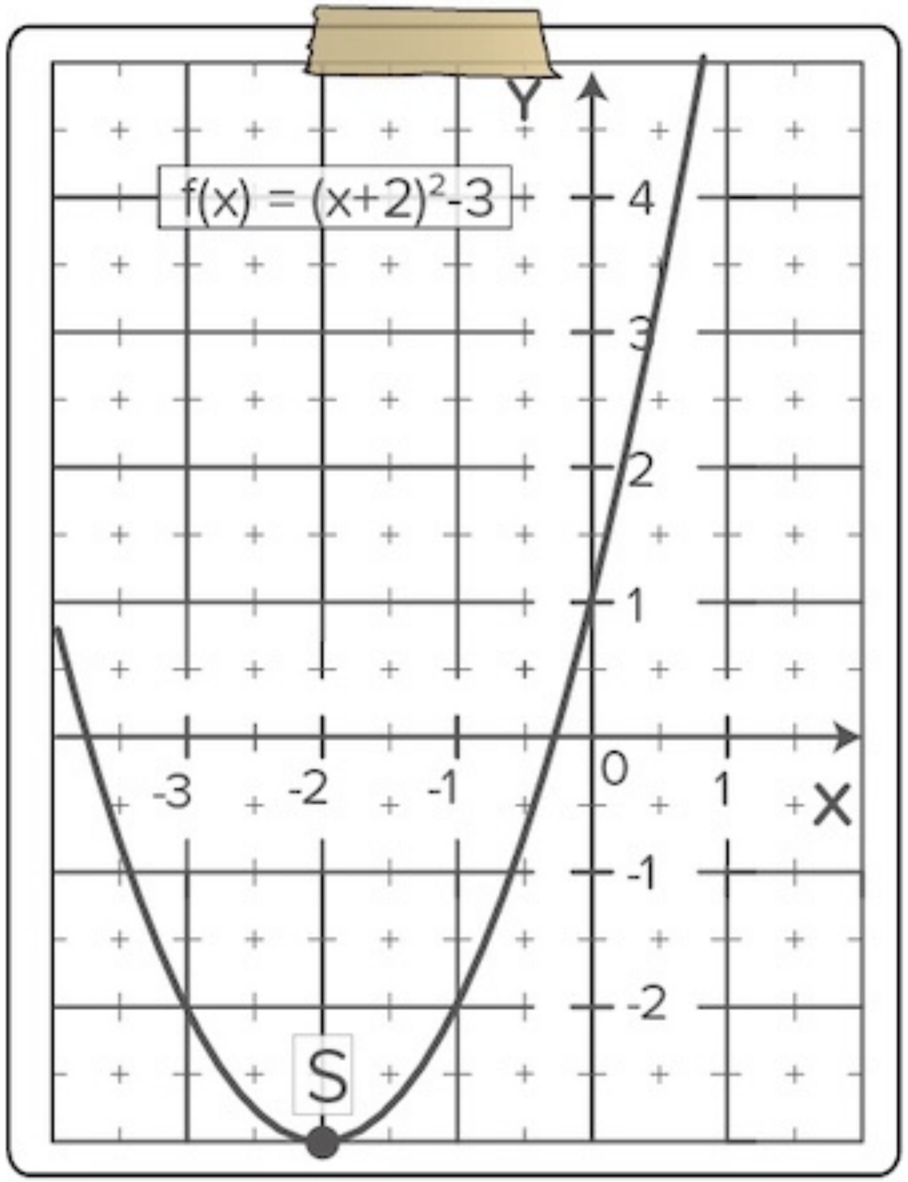


Eigenschaften

- achsensymmetrisch zur y-Achse
- alle Funktionswerte liegen oberhalb der x-Achse
- für $x<0$: *Funktion fällt*
  für $x>0$: *Funktion steigt*
- Scheitelpunkt S(0/0) ist tiefster Punkt
- je größer der x-Wert, desto steiler ist die Parabel

2 Verschobene Parabeln der Form $y = (x+d)^2+e$

Die quadratische Funktion $f(x) = (x+d)^2+e$ ist eine **verschobene Normalparabel**.
Ihr Scheitelpunkt liegt bei **S(-d/e)**.



Funktionsvorschrift

$f(x) = (x + d)^2+e$

Verschiebung in y-Richtung

entgegengesetzte Verschiebung in x-Richtung

$f(x) = (x + 2)^2-3$

-2 in x-Richtung

-3 in y-Richtung

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Y	+1	-2	-3	-2	+1	6	13

Scheitelpunkt
S(-2 / -3)

Normalform ⟷ Scheitelpunktsform

Eine Parabel kann in der Normal- oder Scheitelpunktsform angegeben werden. Bei der Normalform lässt sich der Schnittpunkt mit der y-Achse und bei der Scheitelpunktsform der Scheitelpunkt direkt ablesen.

Umwandlung

Wende die 1. oder 2. binomische Formal an

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Normalform

$$f(x) = x^2 + 10x - 5 =$$

$$(x^2 + 10x + \boxed{\left(\tfrac{10}{2}\right)^2}) - 5 \boxed{-25}$$

quadratische Ergänzung

$$f(x) = (x + 5)^2 - 30$$

Scheitelpunktsform

Scheitelpunktsform

$$f(x) = \boxed{(x - 4)^2} - 3$$

2.bin. Formel

$$f(x) = \boxed{(x^2 - 8x + 16)} - 3$$

$$f(x) = x^2 - 8x + 13$$

Normalform

Wenn ein Punkt auf einer Parabel liegt, dann müssen seine Funktionswerte die Funktionsvorschrift erfüllen.

Liegen die Punkte P(-3/-2) bzw. Q(1/4) auf der Parabel $f(x)=(x+2)^2 - 3$?

Setze die Koordinaten der Punkte in die Vorschrift ein:

x / y → $y = (x + 2)^2 - 3$ vergleichen

P(-3 / -2) → $-2 = (-3 + 2)^2 - 3 = -2 = \boxed{-2}$ ✓

Q(1 / 4) → $4 = (1 + 2)^2 - 3 = 6 = \boxed{4}$ ϟ

Also liegt der Punkt P auf der Parabel und der Punkt Q nicht.

Die Punkte P(-1/-2) und Q(-4/1) liegen auf einer Parabel. Berechne die Scheitelpunktsform der Parabel.

Setze die Koordinaten der Punkte in die allgemeine Vorschrift ein:

x / y → $y = (x + d)^2 + e$

P(-1 / -2) → $-2 = (-1 + d)^2 + e$

Q(-4 / 1) → $1 = (-4 + d)^2 + e$

Du erhältst 2 Gleichungen mit 2Unbekannten. Löse dieses Gleichungssystem nach dem Subtraktionsverfahren.

$$\left.\begin{array}{ll} P \rightarrow & 1 - 2d + d^2 + e = -2 \\ Q \rightarrow & 16 - 8d + d^2 + e = 1 \end{array}\right\} -$$

$$\begin{array}{rcll} -15 + 6d & = & -3 & \mid +15 \\ 6d & = & 12 & \mid :6 \rightarrow d = 2 \end{array}$$

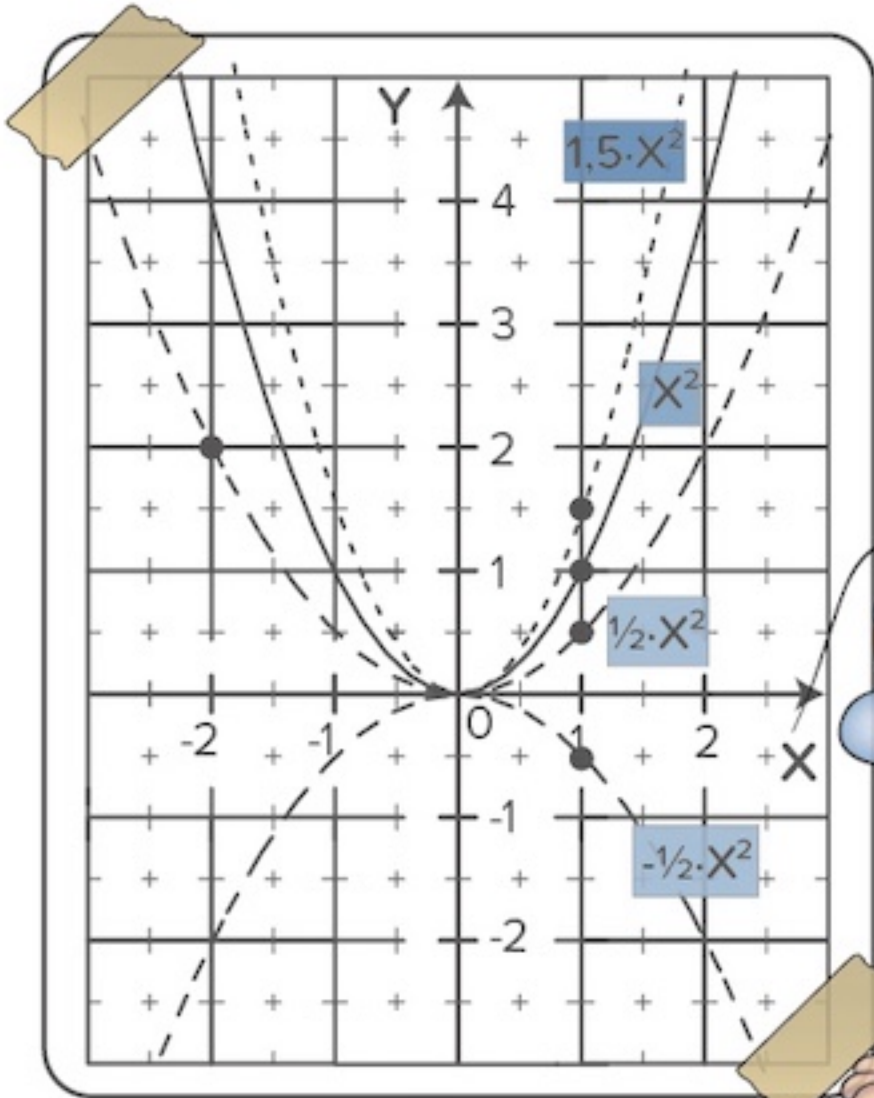
Setze d=2 in eine der Gleichungen ein und berechne dann e.

P → $(-1 + 2)^2 + e = -2 \Rightarrow e = -3$

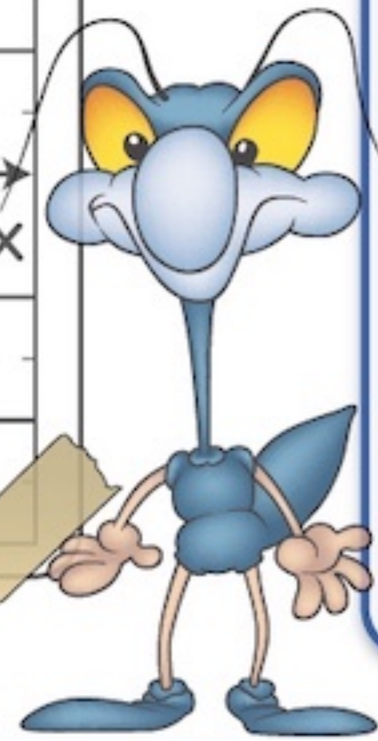
Die Vorschrift lautet: $f(x) = (x+2)^2 - 3$

Parabeln der Form $y = a \cdot x^2$

Eine Parabel kann mithilfe eines a-Faktors gestreckt oder gestaucht werden.



$f(-2) = 0{,}5 \cdot (-2)^2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$



Eigenschaften

$a = 1$	Normalparabel
$0 < a < 1$	**Parabel ist gestaucht** verläuft außerhalb der Normalparabel
$a > 1$	**Parabel ist gestreckt** verläuft innerhalb der Normalparabel
$a < 0$	Parabel ist **nach unten geöffnet**

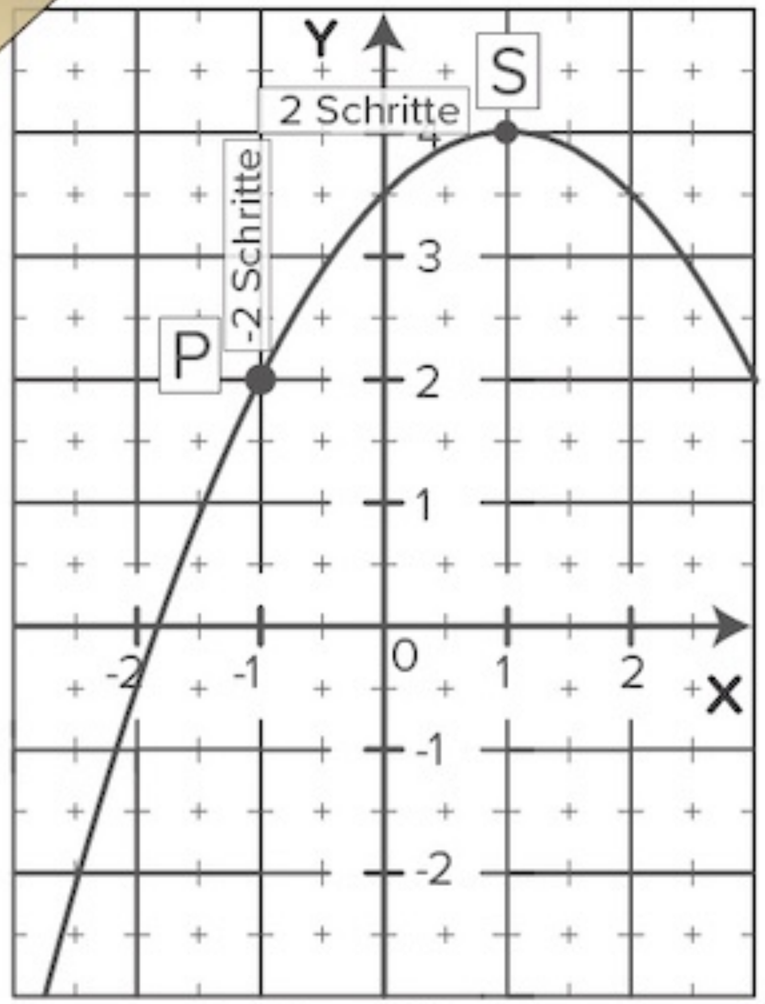
Bestimmung des a-Faktors

1. **ablesen:** P(1/y) mit y = a-Faktor
2. **berechnen:** P(-2/2) in $y = ax^2$ einsetzen
   $2 = a \cdot (-2)^2 \rightarrow a = 0{,}5$

6 Parabeln der Form $y = a \cdot (x+d)^2 + e$

Eine gestreckte bzw. gestauchte Parabel kann noch im Achsenkreuz verschoben sein.

Von S aus gehen



x-Richtung: 2
y-Richtung: $2^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -2$

Scheitelpunktsform:

$$f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$$

Verschiebung in **y-Richtung** (e)

Streckungs-Stauchungsfaktor (a)

entgegengesetzte Verschiebung in **x-Richtung** (d)

Umwandlung

Normalform→Scheitelpunktsform

$$\begin{aligned}
y &= -0{,}5 \cdot x^2 + x + 3{,}5 \quad &&|:(-0{,}5)\\
-2y &= x^2 - 2x - 7 &&\\
-2y &= (x^2 - 2x \boxed{+1^2}) - 7 \boxed{-1} &&\\
&\quad \textit{quadr. Ergänzung} &&\\
-2y &= (x-1)^2 - 8 &&|\cdot(-0{,}5)\\
\mathbf{y} &= \mathbf{-0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 4} &&
\end{aligned}$$

Probleme lösen mit Parabeln

Wenn man Sachzusammenhänge mit quadratischen Funktionen beschreibt, um Fragestellungen beantworten zu können, nennt man die Beschreibung ein mathematisches Modell.

Die „Harbour Bridge“ in Sydney hat die Form einer Parabel (Stauchung: 43/20000) und eine Spannweite von 502m. Vom linken Ufer aus wurde für den oberen Bogen ein Messpunkte bestimmt: P(10/10,58). Berechne die Höhe der Brücke.

1 Situation erfassen

2 Modell suchen

Gesucht ist der Scheitelpunkt, also muss die Scheitelpunktsform benutzt werden.

3 Mit Modell rechnen

Setze die bekannten Werte in die Gleichung ein und löse nach e auf:

$$y = -43/20000 \cdot (x - 251)^2 + e$$
$$10{,}58 = -43/20000 \cdot (10 - 251)^2 + e$$
$$10{,}58 = -124{,}9 + e$$

4 Problem lösen

▶ Brückenhöhe
e = 135,5m